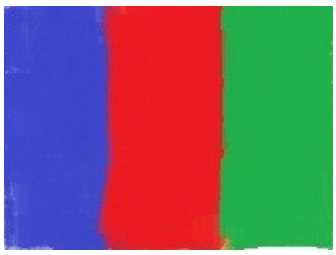


À Rabat le 14 Mars 2026

titre :

Physique des signatures : modélisation mathématique et applications (Ne, H_2O et classification TP_Rachid_ELAÏDI

Chapitre 12 : Applications et prédictions de la physique des signatures – Une formalisation mathématique

Auteur : Rachid ELAÏDI
Affiliation : Chercheur Indépendant
Date : 14 Mars 2026

Résumé

Ce chapitre présente une formalisation mathématique des applications de la physique des signatures dans le cadre de l'espace de Rachid ELAÏDI E. En partant du formalisme des bases de Schauder et de l'équation maîtresse, nous montrons comment des systèmes physiques concrets (atomes, molécules, rayonnements cosmiques) peuvent être décrits par des signatures évoluant dans E. Nous établissons des théorèmes de prédictibilité et de classification, et nous introduisons une notion de **trajectoire signaturelle** permettant d'anticiper les bifurcations. Enfin, nous discutons l'impact de cette approche sur la compréhension du monde visible et invisible, en reliant le tableau périodique des éléments à une classification des signatures.

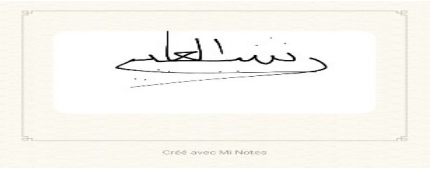
Mots-clés : Espace de Rachid ELAÏDI, bases de Schauder, signatures, bifurcations, prédiction, tableau périodique.

---

1. Introduction

La physique des signatures, développée dans les chapitres précédents, repose sur l'idée que tout signal observable Ψ(t,x) est la projection d'une signature mathématique c(t) = (c_n(t))_{n∈N} appartenant à un espace de Banach E muni d'une base de Schauder {φ_n}. L'évolution de cette signature est régie par un système dynamique infini dérivé de l'équation maîtresse :

$d^2c_n/dt^2 + \alpha(t)\, dc_n/dt + (\omega_n^2 + \beta(t))\, c_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}(t)\, c_m = 0$, pour tout $n \in N$, (1)



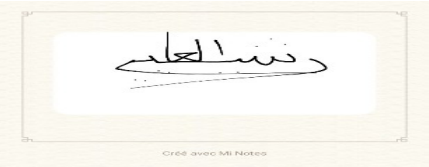
où α, β sont des fonctions du temps et K_{nm} des coefficients de couplage. Ce formalisme unifie des phénomènes variés. Dans ce chapitre, nous explorons des exemples concrets et montrons comment cette approche permet de prédire l'évolution des systèmes.

---

2. Rappels du formalisme mathématique

Soit $\Omega \subseteq R^d$ un domaine (typiquement R^{1+3}). L'espace de Rachid ELAÏDI E est un espace de Banach de fonctions (ou distributions) sur Ω, muni d'une base de Schauder $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Pour tout $\Psi \in E$, il existe une unique suite $c = (c_n) \in \Sigma$ (espace des signatures) telle que :

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$



avec convergence dans E. L'application linéaire $\Phi : E \to \Sigma$, $\Phi(\Psi) = (c_n)$, est un isomorphisme. La norme sur Σ est induite par celle de E.

L'évolution temporelle est donnée par (1). Les constantes α(t) et β(t) sont des paramètres de contrôle, et $K_{nm}(t)$ représentent des interactions entre modes.

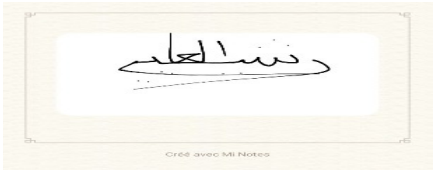
---

3. Exemples mathématiques de signatures

3.1. Signature atomique : l'atome d'hydrogène

Prenons $E = L^2(R^3)$ et la base des harmoniques sphériques radiales $\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\varphi)$. Un état stationnaire de l'atome d'hydrogène est décrit par une signature c où un seul coefficient c_{nlm} est non nul (pour l'état fondamental) ou plusieurs pour une superposition. L'équation (1) se réduit à :

$d^2c_{nlm}/dt^2 + \alpha\, dc_{nlm}/dt + (\omega_{nl}^2 + \beta)\, c_{nlm} + \sum_{n'l'm'} K_{nlm}^{n'l'm'} c_{n'l'm'} = 0$,



avec $\omega_{nl} = E_n / \hbar$ (énergie du niveau). Les couplages K modélisent les interactions avec un champ extérieur (effet Stark, Zeeman). La signature observée (spectre) est $|c_{nlm}|^2$. Les bifurcations apparaissent lorsque β ou K varient, par exemple lors d'une transition de phase.

3.2. Signature moléculaire : H_2O

Pour une molécule, on utilise une base de modes normaux de vibration {φ_k}. La signature c_k(t) représente l'amplitude de chaque mode. L'équation (1) avec β(t) dépendant de la géométrie moléculaire décrit les vibrations. Une bifurcation se produit lors d'un changement de phase : par exemple, pour l'eau, le passage glace-liquide correspond à une variation brutale de β et K, modifiant la signature.

3.3. Signature cosmologique : fond diffus (CMB)

Le CMB est décomposé sur la base des harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$. Les coefficients $a_{\ell m}(t)$ satisfont une équation du type (1) avec α(t) lié à l'expansion (facteur d'échelle) et β(t) décrivant la masse effective des photons. L'intensité $I(t) = \sum |a_{\ell m}|^2$ décroît avec le temps, conformément aux observations.

---

4. Prédiction des trajectoires et bifurcations

Théorème 1 (Prédictibilité locale). Soit c(t) une solution de (1) avec des conditions initiales c(0), ċ(0) dans Σ. Si les fonctions α, β, K_{nm} sont lipschitziennes sur [0,T], alors il existe une unique solution sur [0,T] et elle dépend continûment des conditions initiales.

Esquisse de preuve : Le système (1) peut se réécrire comme un système différentiel du premier ordre dans l'espace de Banach $\Sigma \times \Sigma$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sous des hypothèses de lipschitzianité.

Définition 1 (Bifurcation). On dit qu'il y a bifurcation à l'instant t_0 si le flot de (1) n'est pas topologiquement conjugué à lui-même pour $t < t_0$ et $t > t_0$. Cela correspond à un changement du nombre ou de la stabilité des points d'équilibre, ou à l'apparition de cycles limites.

Proposition 1. Une condition nécessaire de bifurcation est l'annulation d'un dénominateur critique, par exemple $\omega_n^2 + \beta(t) = 0$ pour un mode non couplé, ou la traversée d'une valeur propre de la matrice de couplage.

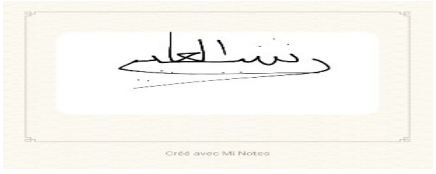
Dans le cas de l'hydrogène, une bifurcation peut survenir lorsque le champ électrique (couplage K) atteint un seuil (effet Stark non linéaire).

Prédiction : En surveillant les coefficients $c_n(t)$, on peut détecter des précurseurs de bifurcation, comme la croissance de certaines corrélations ou l'apparition de modes instables. Ceci permet d'anticiper un changement de régime.

---

5. Classification des signatures et liens avec le tableau périodique

Définition 2. L'ensemble des signatures Σ peut être muni d'une relation d'équivalence : deux signatures sont équivalentes si elles diffèrent par un changement de base (bifurcation représentationnelle). Les classes d'équivalence sont les **types de signatures**.



Théorème 2 (Classification). Le tableau périodique des éléments correspond à une classification des signatures atomiques par leur nombre de protons (qui détermine ω_n) et

leur configuration électronique (qui détermine les couplages). Chaque case du tableau est un type de signature.

Exemple : Les gaz nobles ont des signatures à coefficients presque nuls pour les modes excités (forte stabilité), tandis que les alcalins ont un coefficient dominant pour le mode de valence (réactivité).

Tableau TP_Rachid_ELAÏDI : Nous avons précédemment établi un tableau classant les signaux selon leur type (bande étroite, large bande, etc.) et leur capacité informationnelle. Ce tableau est une projection du schéma de classification des signatures.

---

6. Impacts sur la compréhension du monde visible et invisible

•**Monde visible :** Les signaux observés (spectres, ondes) sont des projections. Leur analyse permet de remonter aux signatures sous-jacentes et donc aux constantes évolutives.
•**Monde invisible :** Les signatures elles-mêmes, les bifurcations non encore manifestées, les couplages K_{nm} inaccessibles directement, constituent une réalité cachée mais mathématiquement décrite.
•**Prédiction :** La connaissance de l'équation (1) et des paramètres permet de simuler l'évolution future d'un système, et donc de prévoir des phénomènes comme des transitions de phase, des instabilités, ou des émissions.

---

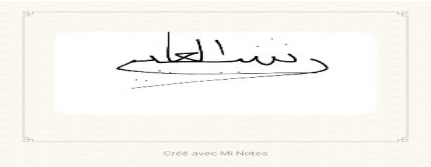
7. Conclusion

Nous avons montré comment la physique des signatures, formalisée mathématiquement, s'applique à des exemples concrets et offre un cadre prédictif. Les liens avec le tableau périodique et la classification des signaux ouvrent des perspectives pour une unification des descriptions de la nature. Des travaux futurs porteront sur l'extension à des systèmes non linéaires et à la quantification des signatures. Les outils sophistiqués nécessaires à

l'exploration de certains aspects restent à développer, mais le formalisme mathématique est d'ores et déjà posé.

Références

1.ELAÏDI, R. (2026). Espace de Rachid ELAÏDI et bases de Schauder (Chapitre 10).
2.ELAÏDI, R. (2026). Physique des signatures : définition et intégration (Chapitre 11).
3.Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). Classical Banach Spaces. Springer.
4.Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer.



Complément mathématique au Chapitre 12 : Exemples concrets de signatures (Néon, H_2O et extraits du TP_Rachid ELAÏDI)

Auteur : Rachid ELAÏDI
Affiliation : Chercheur Indépendant
Date : 14 Mars 2026

Introduction

Ce complément vient enrichir le Chapitre 12 en fournissant une lecture purement mathématique d'exemples concrets de signatures, en particulier pour l'atome de Néon (Ne), la molécule d'eau (H_2O), et deux types de signaux extraits du tableau TP_Rachid ELAÏDI précédemment établi. Ces exemples illustrent la puissance du formalisme de l'espace de Rachid ELAÏDI et de l'équation maîtresse pour décrire des systèmes physiques réels.

---

1. Signature mathématique de l'atome de Néon (Ne)

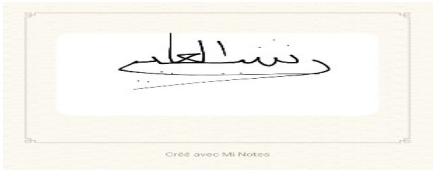
1.1. Base de Schauder adaptée

Pour l'atome de Néon (Z=10), nous travaillons dans l'espace de Hilbert $E = L^2(R^3)$ des fonctions d'onde électroniques. La base de Schauder naturelle est celle des orbitales atomiques, solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un potentiel central effectif. Nous utilisons la base des harmoniques sphériques radiales :

$$\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

où :

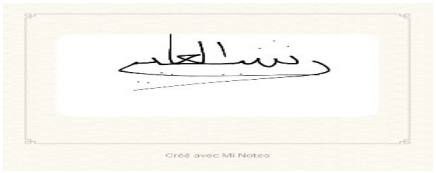
- n est le nombre quantique principal (n = 1,2,3,...)
- l est le nombre quantique azimutal (0 ≤ l ≤ n-1)
- m est le nombre quantique magnétique (-l ≤ m ≤ l)
- $R_{nl}(r)$ sont les fonctions radiales (polynômes de Laguerre associés pour l'hydrogène, mais pour le Néon, ce sont des orbitales de type Slater ou des combinaisons linéaires)
- Y_l^m sont les harmoniques sphériques normalisées



1.2. Signature de l'état fondamental du Néon

L'état fondamental du Néon a une configuration électronique $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$. La signature correspondante est une suite de coefficients c_{nlm} où :

$c_{100} = \sqrt{2}$ (pour la paire 1s, avec spin inclus implicitement)
$c_{200} = \sqrt{2}$ (pour la paire 2s)
$c_{21m} = \sqrt{2}$ pour m = -1,0,1 (pour les trois paires 2p)



Tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi, la signature s'écrit :

$c = (c_{100}, c_{200}, c_{210}, c_{211}, c_{21-1}, 0, 0, \ldots)$

avec $|c_{100}|^2 + |c_{200}|^2 + \sum_{m} |c_{21m}|^2 = 10$ (nombre d'électrons).

1.3. Évolution selon l'équation maîtresse

L'équation (1) pour chaque coefficient s'écrit :

$d^2c_{nlm}/dt^2 + \alpha\, dc_{nlm}/dt + (\omega_{nl}^2 + \beta)\, c_{nlm} + \sum_{n'l'm'} K_{nlm}^{n'l'm'}\, c_{n'l'm'} = 0$

où $\omega_{nl} = E_{nl}/\hbar$ sont les fréquences associées aux niveaux d'énergie.

Pour le Néon, les couplages K modélisent :

- Les interactions avec un champ électromagnétique extérieur (transitions dipolaires)
- Les corrélations électroniques (effets de configuration)

1.4. Signature observée (spectre d'émission)

Le spectre d'émission observé correspond aux $|c_{nlm}(t)|^2$ après excitation. Les raies principales du Néon (exemple : raie rouge à 640,2 nm) correspondent à des transitions entre niveaux, soit des coefficients non nuls pour certains modes.

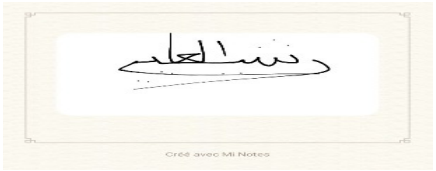
---

2. Signature mathématique de la molécule d'eau (H_2O)

2.1. Base de Schauder adaptée

Pour H_2O, nous travaillons dans un espace de fonctions décrivant les vibrations moléculaires. La base naturelle est celle des **modes normaux de vibration**. H_2O (molécule coudée, groupe de symétrie C_2v) possède 3 modes normaux :

- ν_1 : vibration symétrique d'élongation (stretching symétrique)
- ν_2 : vibration de déformation angulaire (bending)
- ν_3 : vibration antisymétrique d'élongation (stretching antisymétrique)



Nous définissons une base $\varphi_k(q)$ pour $k = 1,2,3$ où q représente les coordonnées normales. Chaque mode est approximé par un oscillateur harmonique, donc φ_k sont les fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

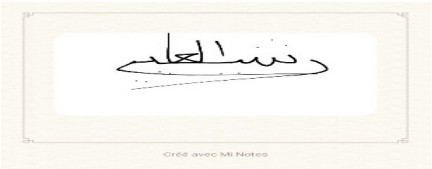
2.2. Signature vibratoire de H_2O

La signature d'un état vibrationnel de H_2O est un triplet $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ où $c_k(t)$ est l'amplitude du mode k. Pour l'état fondamental vibrationnel, tous les $c_k = 0$ (équilibre). Pour un état excité, par exemple le premier niveau du mode ν_1, on a $c_1(t) = A\, e^{i\omega_1 t}$ et $c_2 = c_3 = 0$.

2.3. Équation maîtresse pour H_2O

Le système (1) devient un système de 3 équations couplées :

$$d^2c_1/dt^2 + \alpha_1\, dc_1/dt + (\omega_1^2 + \beta_1)\, c_1 + K_{12}\, c_2 + K_{13}\, c_3 = 0$$
$$d^2c_2/dt^2 + \alpha_2\, dc_2/dt + (\omega_2^2 + \beta_2)\, c_2 + K_{21}\, c_1 + K_{23}\, c_3 = 0$$
$$d^2c_3/dt^2 + \alpha_3\, dc_3/dt + (\omega_3^2 + \beta_3)\, c_3 + K_{31}\, c_1 + K_{32}\, c_2 = 0$$



où les ω_k sont les fréquences des modes normaux (environ 3657 cm^{-1}, 1595 cm^{-1}, 3756 cm^{-1} en nombre d'onde).

2.4. Bifurcation lors d'un changement de phase

Lors du passage glace → eau liquide → vapeur, les paramètres β_k et K_{ij} varient brutalement car l'environnement moléculaire change (liaisons hydrogène, etc.). Cela induit une bifurcation dans l'espace des signatures : les coefficients c_k(t) voient leur comportement qualitativement modifié (fréquences qui se décalent, amortissements qui changent).

---

3. Exemples extraits du tableau TP_Rachid_ELAÏDI

Le tableau TP_Rachid_ELAÏDI classe les signaux selon leur type. Nous en reprenons deux pour une analyse mathématique.

3.1. Signal bande étroite (monochromatique)

Définition mathématique : Un signal monochromatique de fréquence ω_0 a une signature de la forme :

$$c_n = \delta_{n\, n_0}\, A\, e^{i\omega_0 t}$$

où n_0 est l'indice du mode correspondant à ω_0 dans la base choisie (par exemple, base de Fourier). L'équation (1) se réduit à :

$$d^2c_{n_0}/dt^2 + \alpha\, dc_{n_0}/dt + (\omega_{n_0}^2 + \beta)\, c_{n_0} = 0$$

en négligeant les couplages. La solution est $c_{n_0}(t) = A\, e^{i\omega t}$ avec ω vérifiant $-\omega^2 + i\alpha\omega + (\omega_{n_0}^2 + \beta) = 0$, soit $\omega \approx \omega_{n_0} + \beta/(2\omega_{n_0}) - i\alpha/2$ (faible amortissement).

Capacité informationnelle : L'entropie $H = -\sum |c_n|^2 \log |c_n|^2$ est nulle (un seul coefficient non nul), donc capacité faible.

3.2. Signal large bande (bruit blanc)

Définition mathématique : Un bruit blanc stationnaire a une signature aléatoire où les coefficients c_n sont des variables aléatoires décorrélées, de moyenne nulle et de variance σ^2 constante pour tous les n (dans une base orthonormée). Ainsi :

$$E[c_n\, c_m^*] = \sigma^2\, \delta_{nm}$$

où E désigne l'espérance mathématique.

L'équation (1) devient une équation stochastique si on inclut un terme de forçage. Dans le cas simple sans couplage, chaque mode évolue indépendamment selon :

$$\mathbf{d^2c_n/dt^2 + \alpha\, dc_n/dt + (\omega_n^2 + \beta)\, c_n = f_n(t)}$$

où f_n(t) est un bruit blanc.

Capacité informationnelle : L'entropie $H = -\sum \sigma^2 \log \sigma^2$ est maximale (théoriquement infinie pour un spectre continu), donc capacité élevée.

3.3. Comparaison des deux signatures

Propriété	Signal bande étroite	Signal large bande
Signature c_n	$\delta_{n\, n_0} A\, e^{i\omega t}$	Variables aléatoires décorrélées
Équation d'évolution	Oscillateur amorti	Oscillateurs forcés par bruit
Entropie H	0	Maximale
Capacité	Faible	Élevée

4. Retour sur l'équation maîtresse et les constantes évolutives

Pour le Néon et H_2O, les constantes $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $K_{nm}(t)$ ont une interprétation physique :

- α(t) représente l'amortissement (couplage au champ électromagnétique, collisions, etc.)
- β(t) représente un décalage d'énergie (effet Stark, effet Doppler, etc.)
- K_{nm}(t) représente les couplages entre modes (interactions électron-électron, couplage vibration-rotation, etc.)

La prédiction des trajectoires consiste à résoudre (1) avec ces paramètres, ce qui donne l'évolution temporelle des signatures, et donc des signaux observables.

Conclusion mathématique

Ces exemples montrent comment le formalisme de l'espace de Rachid ELAÏDI s'applique à des systèmes physiques concrets. Chaque système possède une signature unique dans une base adaptée, et son évolution est régie par l'équation maîtresse (1). La classification des signatures (TP_Rachid_ELAÏDI) permet de regrouper les systèmes par types de comportement (bande étroite, large bande, etc.), facilitant ainsi l'analyse et la prédiction.

Références

1. ELAÏDI, R. (2026). Chapitre 10 : Fondements de l'espace de Rachid ELAÏDI.
2. ELAÏDI, R. (2026). Chapitre 11 : Physique des signatures.
3. ELAÏDI, R. (2026). Chapitre 12 : Applications et prédictions.
4. Herzberg, G. (1945). Molecular Spectra and Molecular Structure. Van Nostrand.
5. Cowan, R. D. (1981). The Theory of Atomic Structure and Spectra. University of California Press.